

# Probabilité, variable aléatoire. cours de seconde avec variance et espérance

<b>1</b>	<b><i>Loi de probabilité</i></b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b><i>Probabilité d'un événement</i></b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b><i>Opération sur les événements</i></b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b><i>Variable aléatoire</i></b>	<b>9</b>
4.1	Définition .....	9
4.2	Espérance, variance et écart type .....	10
4.3	Arbre pondéré et épreuves répétées .....	10

# 1 Loi de probabilité

## 1.1 Conditions préalables

Il s'agit de construire une structure mathématique qui permette de repérer des situations identiques et d'avoir une méthode rigoureuse dans un domaine où notre intuition nous conduit souvent à la solution sans vraiment avoir conscience de notre démarche.

Dans tout calcul de probabilité, il faut :

- 1) Une expérience aléatoire : il s'agit d'un protocole bien précis (règle d'un jeu) dont on ne peut prévoir l'issue.

**Exemples :**

- Lancer un dé sur une piste de jeu.
- Lancer une pièce de monnaie.
- Distribuer 5 cartes à un joueur avec un jeu de 32 cartes.
- Poser une question au hasard à un lycéen choisi au hasard.
- etc ...

- 2) Repérer toutes les issues possibles de l'expérience : il s'agit d'un dénombrement des issues possibles d'une expérience.

**Exemples :**

- Il y a 6 issues possibles pour un dé :  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .
- Il y a deux issues possibles pour une pièce de monnaie : face ou pile :  $\{F; P\}$
- Il y a 201 376 mains possibles de 5 cartes pour un jeu de 32 cartes
- Il y a 1 200 lycéens dans l'échantillon qui peuvent être interrogés.
- etc ...

- 3) Déterminer ce que l'on souhaite comme issues.

**Exemples :**

- Obtenir un nombre pair avec un dé.
- Obtenir face avec une pièce.
- Obtenir 2 cœurs dans une main de cinq cartes.
- Obtenir un lycéen âgé de moins de 17 ans.
- etc ...

## 1.2 Définitions

**Définition 1 :** On appelle *univers* d'une expérience aléatoire, l'ensemble de toutes les issues de cette expérience. On appelle cet ensemble :  $\Omega$ .

Si  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont les issues de cette expérience, on a alors :  $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

**Exemples :**

- L'univers d'un dé :  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- L'univers d'une pièce :  $\Omega = \{F; P\}$

- Parfois nommer toutes les issues est trop long comme l'univers d'une main de 5 cartes avec un jeu de 32 cartes. On se contente alors de compter les éléments de cet ensemble  $\Omega$

**Définition 2 :** On appelle cardinal d'un ensemble fini  $\Omega$ , le nombre d'éléments qui le compose. On le note  $\text{card}(\Omega)$   
Si  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont les issues de cette expérience, on a alors :  $\text{card}(\Omega) = n$

**Exemples :**

- L'univers  $\Omega$  d'un dé :  $\text{card}(\Omega) = 6$
- L'univers  $\Omega$  d'une main de cinq cartes :  $\text{card}(\Omega) = 201\ 376$

**Définition 3 :** On appelle probabilité d'une issue  $e_i$ , noté  $p(e_i)$  le nombre compris entre 0 et 1 tel que :

$$p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n p(e_i) = 1$$

Définir la loi de probabilité d'une expérience, c'est déterminer les probabilités de tous les éléments de l'ensemble  $\Omega$ .

**Exemples :**

- Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, 3 sont vertes (V), 3 sont bleues (B) et 4 sont jaunes (J), on tire une boule au hasard et on note sa couleur. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience.

L'univers de cette expérience est  $\Omega = \{V, B, J\}$ . Pour déterminer la loi de probabilité de cette expérience, il faut calculer les probabilités suivantes :

$$p(V) = \frac{3}{10} = 0,3 \quad , \quad p(B) = \frac{3}{10} = 0,3 \quad , \quad p(J) = \frac{4}{10} = 0,4$$

On regroupe ces résultats dans un tableau :

$e_i$	V	B	J
$p(e_i)$	0,3	0,3	0,4

- On a lancé 1 000 fois un dé pipé. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous. Établir la loi de probabilité du dé pipé.

numéro sorti	1	2	3	4	5	6
nombre de sorties	82	120	153	207	265	?

Un dé pipé est un dé non équilibré. La loi de probabilité est alors établie par des données statistiques. Sans avoir de certitude sur les probabilités exactes, vu le grand nombre de lancers (1 000), on peut supposer que le nombre d'apparition d'une face détermine sa probabilité.

L'ensemble univers est  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Les probabilités d'apparition des faces 1 à 5 sont :

$$p(1) = \frac{82}{1000} = 0,082 \quad , \quad p(2) = \frac{120}{1000} = 0,12 \quad , \quad p(3) = \frac{153}{1000} = 0,153$$

$$p(4) = \frac{207}{1000} = 0,207 \quad , \quad p(5) = \frac{265}{1000} = 0,265$$

On a :  $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$  donc

$$\begin{aligned} p(6) &= 1 - p(1) - p(2) - p(3) - p(4) - p(5) \\ &= 1 - 0,082 - 0,12 - 0,153 - 0,207 - 0,265 \\ &= 0,173 \end{aligned}$$

On peut alors remplir le tableau suivant :

$e_i$	1	2	3	4	5	6
$p(e_i)$	0,082	0,12	0,153	0,207	0,265	0,173

### 1.3 Loi équirépartie

**Définition 4 :** Lorsque toutes les issues ont la même probabilité d'apparition, on dit que la loi de probabilité est équirépartie (ou encore que l'on se situe dans un cas d'équiprobabilité).

Si  $\text{card}(\Omega) = n$  alors on a :  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad p(e_i) = \frac{1}{n}$

**Exemples :**

- Dans un dé bien équilibré chaque face à la même probabilité d'apparition :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

- Si une pièce est bien équilibrée chaque face à la même probabilité d'apparition :

$$p(F) = p(P) = \frac{1}{2}$$

## 2 Probabilité d'un événement

### 2.1 Définition

**Définition 5 :** On appelle *événement* un sous ensemble de l'univers  $\Omega$ .

Soit  $A$  un événement donné.  $p(A)$ , sa probabilité, est alors la somme des probabilités des issues qui le composent.

**Exemple :** On lance le dé pipé dont on a calculé la loi de probabilité au paragraphe précédent. Calculer la probabilité de l'événement A : "Obtenir un multiple de 3"

On a alors :  $A = \{3, 6\}$ , donc :  $p(A) = p(3) + p(6) = 0,153 + 0,173 = 0,326$

**Remarque :**

- Si l'ensemble A est réduit à l'ensemble vide  $\emptyset$ , il n'est composé d'aucune issue. On l'appelle alors l'**événement impossible** et  $p(\emptyset) = 0$
- Si l'ensemble A représente tout l'univers  $\Omega$ , il est composé de toutes les issues. On l'appelle alors l'**événement certain** et  $p(\Omega) = 1$

## 2.2 Événement d'une loi équirépartie

**Théorème 1 :** Dans une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A vérifie

l'égalité suivante :

$$p(A) = \frac{\text{nbre d'issues de l'événement A}}{\text{nbre d'issues total}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

**Remarque :** Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, le calcul de la probabilité revient à un problème de dénombrement. On peut alors utiliser pour dénombrer les différents cas : un arbre, un tableau double entrée, diagramme de Venn, une liste,...

**Exemple :** Une urne contient 6 boules : 4 rouges (numérotées de 1 à 4) et 2 bleues (numérotées 5 et 6). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note sa couleur. Calculer la probabilité des événements suivants :

R : "tirer deux boules rouges"



Calculons d'abord le nombre de tirages possibles. On cherche ici des paires. Faisons la liste :

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \dots, \{1, 6\}$  5 choix,  
 $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \dots, \{2, 6\}$  4 choix,  
 $\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}$  3 choix,  
 $\{4, 5\}, \{4, 6\}$  2 choix  
 $\{5, 6\}$  1 choix

Il y a en tout :  $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$  tirages possibles

Pour avoir R il ne faut utiliser que les numéros de 1 à 4.

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$  3 choix,  
 $\{2, 3\}, \{2, 4\}$  2 choix,  
 $\{3, 4\}$  1 choix,

Il y a donc :  $3 + 2 + 1 = 6$  choix

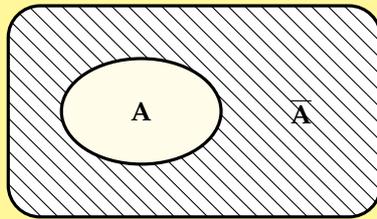
On a donc :  $P(R) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

### 3 Opération sur les événements

**Remarque :** L'étude des probabilités fait appel à la logique mathématique : en effet il s'agit de décoder dans la logique d'un texte les éléments qui serviront aux calculs de probabilités. Les mots les plus importants sont les conjonctions "et", "ou", et la négation "ne... pas" Cette logique mathématique fait appel à l'étude des opérations sur les ensembles. Pour cette raison on définit les opérations suivantes : le complémentaire, l'intersection et l'union. On donnera enfin d'autres opérations qui peuvent se décomposer à l'aide de ces trois opérations de base.

#### 3.1 Événement contraire

**Définition 6 :** On appelle événement contraire d'un événement  $A$ , l'événement noté  $\bar{A}$  composé des éléments de  $\Omega$  qui ne sont pas dans  $A$ .

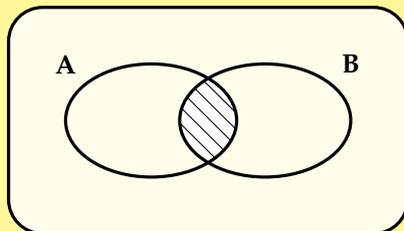


$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in \Omega \text{ et } x \notin A$$

**Exemple :** On lance un dé parfait. On appelle  $A$  l'événement "obtenir un 6". On a donc l'événement contraire  $\bar{A}$  l'événement "ne pas obtenir 6"

#### 3.2 Intersection de deux événements

**Définition 7 :** On appelle l'intersection de deux événements  $A$  et  $B$ , l'événement noté  $A \cap B$  composé des éléments de  $\Omega$  qui appartiennent à  $A$  et à  $B$ . On a alors le schéma suivant :



$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

On dit que les événements  $A$  et  $B$  sont **incompatibles** si et seulement si :  
 $A \cap B = \emptyset$

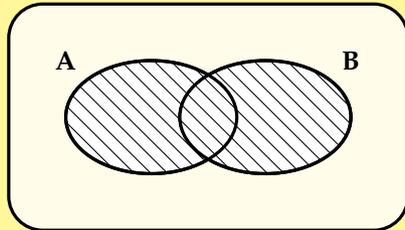
**Exemple :** On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Soient les événements

- $A$  : "obtenir deux cœurs"
- $B$  : "obtenir au moins une dame"

L'événement  $A \cap B$  est donc : "obtenir la dame de cœur et un autre cœur"

### 3.3 Union de deux événements

**Definition 8 :** On appelle union de deux événements  $A$  et  $B$ , l'événement noté  $A \cup B$  composé des éléments de  $\Omega$  qui appartiennent à  $A$  ou (non exclusif) à  $B$ . On a alors le schéma suivant :



$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

On dit que les événements  $A$  et  $\bar{A}$  forment une **partition** de  $\Omega$  car :  
 $A \cup \bar{A} = \Omega$  et  $A \cap \bar{A} = \emptyset$

**Exemple :** On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Soient les événements

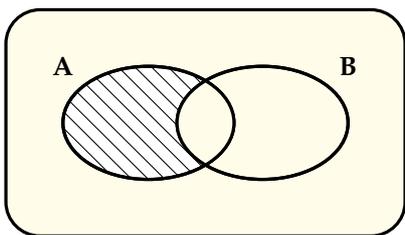
- $A$  : "obtenir deux cartes de même valeur"
- $B$  : "obtenir un roi"

L'événement  $A \cup B$  est donc : "obtenir deux cartes de même valeur ou un roi et une autre carte de valeur différente"

### 3.4 Autres opérations et lois de "logique ensembliste"

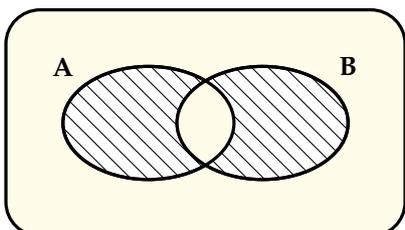
Les opérations peuvent se définir à l'aide du complémentaire, de l'intersection et de l'union de deux ensembles.

- Différence entre deux ensembles :  $A - B$



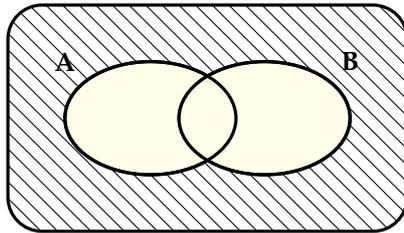
$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B}$$

- Différence symétrique entre deux ensembles ("ou" exclusif) :  $A \Delta B$

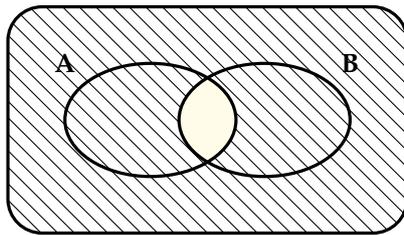


$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

- Lois "de Augustus De Morgan " : 
$$\begin{cases} \text{non}(A \text{ ou } B) = \text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B) \\ \text{non}(A \text{ et } B) = \text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B) \end{cases}$$



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



$$\overline{A} \cap B = \overline{A \cap B}$$

**Remarque :** À l'aide de cette dernière égalité, on pourrait définir l'intersection uniquement à l'aide du complémentaire et de l'union

$$A \cap B = \overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

### 3.5 Utilisation de ces opérations dans une loi de probabilité

**Théorème 2 :** Si A et B sont deux événements, alors on a :

$$\begin{aligned} p(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\ p(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Si A et B sont incompatibles, alors :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**Exemple :** A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire. Calculer  $p(B)$  puis  $p(\overline{B})$ . On donne :

$$p(A) = 0,3 \quad ; \quad p(A \cup B) = 0,7 \quad \text{et} \quad p(A \cap B) = 0,2$$

On calcule d'abord  $P(B)$  :

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ p(B) &= p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B) \\ p(B) &= 0,7 - 0,3 + 0,2 = 0,6 \end{aligned}$$

On calcule ensuite :  $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 0,4$

## 4 Variable aléatoire

### 4.1 Définition

**Définition 9 :** Définir une variable aléatoire  $X$  sur  $\Omega$ , c'est associer à chaque issue  $e_i$  de  $\Omega$  un nombre  $x_i$ .

Définir une loi de probabilité de  $X$  consiste à associer à chaque valeur  $x_i$  la probabilité  $P(X = x_i) = p_i$

On a alors :  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

**Remarque :** Cette dénomination est un abus de langage. D'abord  $X$  n'est pas une variable, mais une fonction, définie sur l'univers. Ensuite cette fonction n'a rien d'aléatoire ; elle est parfaitement déterminée.

**Exemple :** On lance trois pièces de monnaie identiques. On numérote les pièces 1, 2 et 3. Pour chaque pièce, il y a deux éventualités, soit elle tombe sur face soit sur pile. Si on relève dans l'ordre les résultats des pièces 1, 2 et 3, on obtient  $2^3 = 8$  issues possibles.

Si on associe l'apparition d'une pièce sur face avec un gain de 2 € et l'apparition d'une pièce sur pile avec une perte de 1 €, on crée une variable aléatoire  $X$  qui à une issue possible associe un gain. cette variable aléatoire  $X$  peut donc prendre comme valeur :

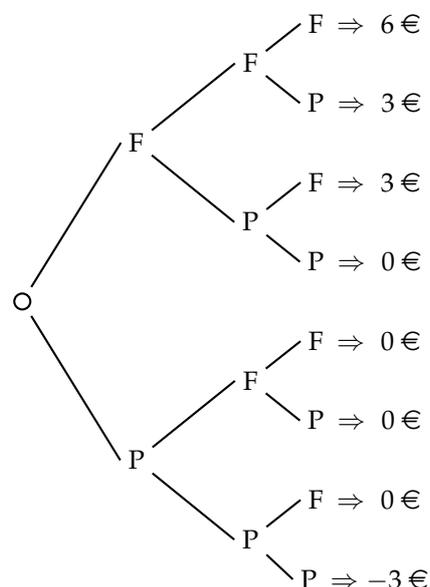
- 6 € si les trois pièces tombent sur face
- 3 € si deux pièces tombent sur face et une sur pile
- 0 € si une pièce tombe sur face et deux sur pile
- -3 € si les trois pièces tombent sur pile

On peut visualiser tous les cas à l'aide d'un arbre de dénombrement :

$$\begin{aligned}
 p(X = 6) &= \frac{1}{8} && \text{une issue} \\
 p(X = 3) &= \frac{3}{8} && \text{trois issues} \\
 p(X = 0) &= \frac{3}{8} && \text{trois issues} \\
 p(X = -3) &= \frac{1}{8} && \text{une issue}
 \end{aligned}$$

On peut résumer la loi de probabilité de  $X$  par le tableau suivant :

$x_i$	6	3	0	-3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



## 4.2 Espérance, variance et écart type (*seul ajout de première*)

**Définition 10 :** On appelle l'**espérance mathématique** de la variable  $X$ , la quantité notée  $E(X)$  définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

On appelle **variance** et **écart-type** de la variable  $X$ , les quantités notées respectivement  $V(X)$  et  $\sigma(X)$  définies par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E^2(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

**Remarque :**

- L'espérance mathématique correspond à une moyenne des valeurs prises, pondérées par les probabilités de la loi définie sur  $X$ .  
Si  $X$  représente le gain pour un jeu,  $E(X)$  représente le gain moyen que peut espérer le joueur. On dit alors que si  $E(X) > 0$ , le jeu est favorable au joueur, si  $E(X) < 0$ , le jeu est favorable à l'organisateur et si  $E(X) = 0$  le jeu est équitable.
- La variance correspond à la moyenne des écarts au carré. L'écart-type permet de revenir à un paramètre simple. Plus l'écart-type est grand plus les écarts obtenus entre deux expériences est important.

**Exemple :** Reprenons le lancer de trois pièces avec  $X$  le gain réalisé :

$$E(X) = \frac{1}{8} \times 6 + \frac{3}{8} \times 3 + \frac{3}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times (-3) = \frac{6 + 9 + 0 - 3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5$$

En moyenne le joueur peut espérer gagner 1,5 €. Le jeu est donc favorable au joueur.

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{8} \times 6^2 + \frac{3}{8} \times 3^2 + \frac{3}{8} \times 0^2 + \frac{1}{8} \times (-3)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{36 + 27 + 0 + 9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{72}{8} - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} = 6,75 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{6,75} \simeq 2,60$$

En moyenne les écarts de gain sont de 2,60 €.

## 4.3 Arbre pondéré et épreuves répétées

Un dé parfait a ses faces numérotées : 1, 1, 1, 2, 2, 4. On lance ce dé trois fois de suite.

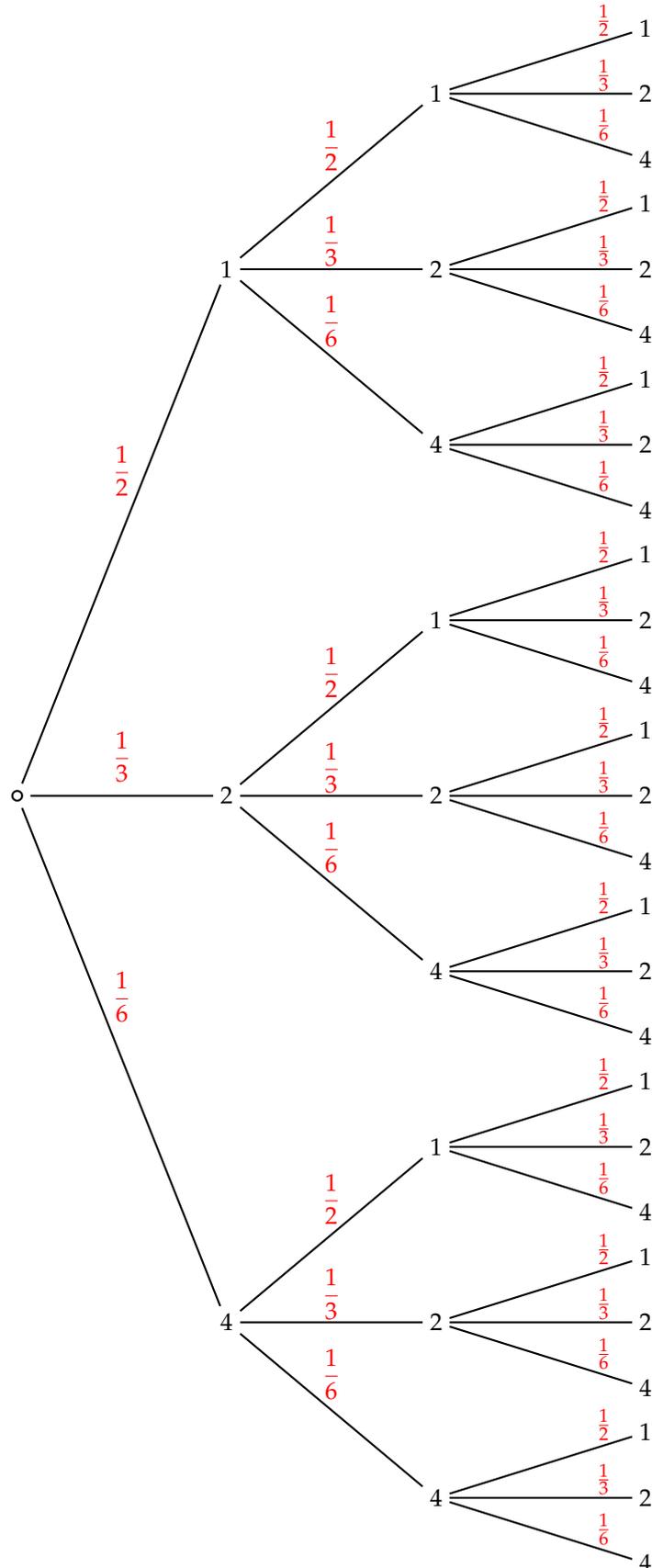
On note de gauche à droite le numéro obtenu. On obtient ainsi un nombre de trois chiffres.

- 1) Représenter la situation par un arbre pondéré.

On détermine les probabilités d'obtenir respectivement les faces 1, 2 et 4 :

$$p(1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad p(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p(4) = \frac{1}{6}$$

On établit alors l'arbre de probabilité pondéré suivant correspond aux trois lancers :  $3^3 = 27$  lancers possibles



**Propriété 1 :** Pour remplir et utiliser un arbre de probabilité pondéré, on a les propriétés suivantes :

- Sur chaque branche de l'arbre, on écrit les probabilités correspondantes.  
⚠ pas de pourcentage.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement.

2) Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A : "le nombre est 421"

Il y a qu'un chemin possible le 4 puis le 2 puis le 1 soit :

$$p(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$$

b) B : "le nombre a trois chiffres différents"

Il y a 6 chemins possibles correspondants aux nombres :

124, 142, 214, 241, 412, 421 :

$$p(B) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) C : "le nombre contient au moins une fois le chiffre 2"

On passe par le complémentaire, ne pas obtenir le chiffre 2, c'est à dire faire 1 ou 4 à chaque lancer :

$$p(\bar{C}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \text{ donc } p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

3) On appelle X la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où le chiffre 1 est utilisé dans l'écriture du nombre. Déterminer la loi de probabilité de X.

X peut prendre 4 valeurs possibles : 0, 1, 2, 3

• Pour X = 0, on fait 2 ou 4 à chaque lancer :

$$p(X = 0) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

• Pour X = 1, on a 12 chemins correspondants aux nombres :

trois chiffres différents : 124, 142, 214, 241, 412, 421,

deux fois le chiffre 2 : 122, 212, 221

deux fois le chiffre 4 : 144, 414, 441

$$p(X = 1) = \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{3}{18} + \frac{3}{72} = \frac{3}{8}$$

- Pour  $X = 2$ , on a 6 chemins correspondants aux nombres :  
soit une fois le chiffre 2 : 112, 121, 211 soit une fois le chiffre 4 : 114, 141, 411

$$p(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{3}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

- Pour  $X = 3$ , un seul nombre 111 :  $p(X = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

On peut conclure par le tableau suivant :

$x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- 4) Déterminer l'espérance de la variable  $X$  puis en donner une interprétation.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{0 + 3 + 6 + 3}{8} = \frac{15}{8} = 1,875$$

En moyenne sur trois lancers de ce dé, on a 1,875 fois le chiffre 1.